

# TOÁN HỌC DƯỚI CÁI NHÌN TRIẾT HỌC

Nguyễn Cung Hoàng Nam

“*Vật chất dùng để chỉ thực tại khách quan được đem lại cho con người trong cảm giác, được cảm giác của chúng ta chép lại, chụp lại, phải ánh và tồn tại không lệ thuộc vào cảm giác*”. Các đối tượng toán học đều có đặc điểm như vậy. Thế giới toán học như thể một thế giới vật chất thu nhỏ mà trong có các đối tượng toán học như thể vật chất, còn các tính chất trong toán học như thể các hiện tượng. *Nếu triết học nghiên cứu về sự vận động và phát triển của sự vật và hiện tượng* thì toán học nghiên cứu về những đối tượng và các tính chất bất biến của nó. Điều đó cho thấy rằng toán học và triết học có mối liên hệ chặt chẽ với nhau. Cụ thể như sau:

1) Toán học là một thế giới vật chất

*Theo chủ nghĩa duy vật, vật chất có trước, ý thức có sau, vật chất quyết định ý thức.* Điều này cũng giống như trong toán học, tất cả các đối tượng toán học đều có trước và tồn tại khách quan, không phụ thuộc vào cảm giác con người. Tất cả các đối tượng toán học đều có trước những người khám phá ra nó. Chẳng hạn, hàm số-đồ thị, tập số, phương trình, hình lập phương.... tất cả đã vốn đều có trong thực tiễn.. Thật vậy, ta có:

+ Hàm số – đồ thị: tất cả mối liên hệ trong thực tiễn có liên quan tương ứng một một đều là mối liên hệ của “hàm” (nói theo nghĩa hẹp là “hàm số”). Ví dụ: mỗi căn nhà thì có một địa chỉ, mỗi người có một số chứng minh nhân dân, mỗi đường truyền internet có một địa chỉ IP... Sự biến đổi tăng giảm của giá vàng, sự thay đổi về nhiệt độ, thời tiết, ... đó là đồ thị

+ Tập số: một lớp học gồm 40 học sinh, một hộp bút có 12 cây bút, ... những con số 40, 12 đó nếu con người không khám phá thì tự bản thân nó vẫn là 40 và 12, chỉ có một điều nó chưa được gán cái tên là “40-12”... Như vậy, trước khi con người tìm ra số, thì bản thân nó vẫn tồn tại một cách khách quan... Con người khám phá, nói chính xác hơn là khám phá lại

+ Phương trình: nó vẫn có sẵn trong thực tiễn, đó là từ những tình huống, những bài toán cần tìm một đối tượng nào đó ....

+ Hình lập phương: trong thực tiễn hình lập phương, cho dù con người có khám phá ra nó hay không thì nó vẫn tồn tại và mãi mãi là hình lập phương

Con người đã từ nghiên cứu thực tiễn, khái quát hóa nên các đối tượng ấy...Chỉ khác, là vốn ban đầu, các đối tượng đó chưa được gọi tên là “hàm số – đồ thị”, “tập số”, “phương trình”, “hình lập phương”... Tất cả những đối tượng đó đúng như triết học đã nói “*tồn tại khách quan, độc lập với ý thức của con người, không ai sáng tạo ra và không ai có thể tiêu diệt được*”

Trong triết học, *phương pháp luận biện chứng là xem xét sự vật, hiện tượng trong sự ràng buộc lẫn nhau giữa chúng, trong sự vận động và phát triển không ngừng của chúng*. Tất cả các chứng minh toán học đều là phương pháp luận biện chứng. Khi chứng minh, đương nhiên các sự vật (ở đây là các đối tượng toán học) được nhà toán học dựa trên sự ràng buộc giữa chúng, và trong sự vận động không ngừng. Ví dụ: khi chứng minh một bất đẳng thức thì các số  $a, b, c$  trong chứng minh đó hoặc là cùng thuộc  $R$ , hoặc là cùng số dương ... sự ràng buộc đó cũng có thể là những điều kiện kèm theo trong bất đẳng thức. Liên quan đến việc chứng minh tính chất nghiệm phương trình bậc ba là sự vận động (phát triển) cho một tập hợp số mới đó là tập số phức

Tất cả các đối tượng trong toán học đều có mối quan hệ biện chứng. Ví dụ:

+ Phép toán “ $1+1=2$ ”: trong phép cộng nói trên thì 3 số 1,1,2 có quan hệ biện chứng với nhau. Nói rộng hơn tất cả các công thức trong toán học đều thể hiện mối quan hệ biện chứng

+ “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau”: mối quan hệ biện chứng giữa 2 góc đối đỉnh. Tất cả các định lý, tính chất đều thể hiện mối quan hệ biện chứng trong đó

+ Biến số và hàm số

+ Những mệnh đề  $P \Rightarrow, P \Leftrightarrow Q$

Trong triết học “*thế giới vật chất có trước, phép biện chứng phản ánh nó là cái có sau. Thế giới vật chất luôn vận động và phát triển theo những quy luật khách quan.*”. Đúng như vậy, thế giới toán học (bao gồm

tất cả đối tượng và tính chất các đối tượng) là cái có trước còn tất cả các chứng minh toán học là cái có sau. Con người có khả năng nhận thức được các quy luật của các đối tượng đó. Sự nhận thức này là từ phương pháp luận biện chứng đã nói ở trên. Như vậy, toán học và phương pháp luận biện chứng cũng *không thể tách rời nhau, mà chúng phải gắn bó chặt chẽ với nhau*

## 2) Thế giới vật chất tồn tại khách quan

*“Ý thức con người của con người (thông qua hoạt động) tuy có ảnh hưởng đến sự tồn tại và phát triển của giới tự nhiên, song sự tồn tại và phát triển của giới tự nhiên vẫn tuân theo những quy luật riêng của chúng, con người không thể quyết định hoặc thay đổi những quy luật đó theo ý muốn chủ quan của mình”*. Trong toán học, từ những hoạt động toán học (khám phá các đối tượng, chứng minh các tính chất toán học) đã làm cho *“thế giới toán học”* phát triển ngày càng nâng cao, nhưng toán học vẫn có sự phát triển theo quy luật chung khách quan không phụ thuộc vào con người, con người không thể thay đổi được các quy luật đó. Nếu như *“2 đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ 3 thì chúng song song với nhau”* thì mãi mãi là như vậy. Đó là một chân lý, dù muốn dù không, dù có khám phá ra hay chưa khám phá ra con người cũng không thể thay đổi được. Ngay cả việc Lobasepxki thay đổi các tiên đề của hình học Ôclit để tạo ra hình học phi Ôclit thì sự hình thành hình học mới cũng rất tự nhiên theo quy luật khách quan. Xét trên hệ tiên đề mới thì những quy luật mới trong hình học phi Ôclit ví dụ như *“tổng 3 góc trong tam giác không bằng  $180^\circ$ ”* cũng là một quy luật tự thân có sẵn. Ở đây ta không được cho rằng hình học phi Ôclit phủ nhận hình học Ôclit bởi vì 2 hình học là xây dựng trên những tiên đề khác nhau. Tất cả quy luật đó không do một lực lượng thần bí nào tạo ra, nó là những quy luật tự nhiên.

*“Con người không thể tạo ra thế giới tự nhiên, nhưng có thể nhận thức được thế giới tự nhiên và cải tạo được thế giới tự nhiên”*. Tất cả các đối tượng toán học và tính chất bất biến trong toán học đều có quy luật riêng của nó. Tuy nhiên con người có khả năng nhận thức được, tác động vào nó và khám phá ra nó sớm hơn để nó trở lại phục vụ cho con người. Vẫn có thể trong quá trình phát triển của toán học, con người nhận thức sai nhưng từ những nhận thức sai đó đôi khi lại mở đường cho

toán học phát triển. ả hững nhận thức sai đó sẽ thúc đẩy con người tìm ra chân lý. Việc nhận thức về toán học cũng đã làm cho con người hiểu rõ hơn về thế giới vật chất, nâng cao thế giới quan và phương pháp luận biện chứng của con người.

### 3) Sự vận động và phát triển của thế giới vật chất

Thế giới vật chất luôn luôn vận động và phát triển. Sự vận động và phát triển đó có thể là sự vận động trong nội tại kiến thức toán học. Ví dụ như:

+ Phép tịnh tiến đồ thị, góc lượng giác, phép biến hình trong hình học, quỹ tích và tập hợp điểm, họ đường cong chứa tham số, giới hạn hàm số, sự liên tục của hàm số, góc lượng giác...

+ Hiểu rộng hơn, sự vận động còn thể hiện ở phương trình và bất phương trình chứa tham số, khi tham số thay đổi phương trình và bất phương trình thay đổi... Và ta cần chú ý khi xem xét các phương trình và bất phương trình phải *xem xét trong trạng thái vận động không cứng nhắc* để tránh sai lầm. Ví dụ: nếu phương trình tham số  $m$  thì phải biện luận rõ các trường hợp  $a=0$ ,  $a\neq 0$

+ Các bất đẳng thức có điều kiện cũng thể hiện sự vận động. ả ếu không để ý các điều kiện thì cũng sẽ dẫn đến sai lầm trong việc chứng minh bất đẳng thức

+ Số tự nhiên  $\Rightarrow$  số nguyên  $\Rightarrow$  số hữu tỉ  $\Rightarrow$  số thực  $\Rightarrow$  số phức

+ Số  $\Rightarrow$  phép cộng  $\Rightarrow$  phép nhân  $\Rightarrow$  lũy thừa  $\Rightarrow$  logarit

Sự vận động phát triển đó còn là sự vận động và phát triển của các kiến thức toán học nói chung. Tất cả các kiến thức toán học phát triển hàng ngày hay ngày thậm chí hàng giờ. ả gược dòng thời gian, ban đầu con người ta chỉ biết giải phương trình bậc nhất, nhưng sau đó con người đã biết giải phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn và thậm chí còn chứng minh được phương trình bậc năm không có phương pháp giải tổng quát. Không chỉ lý thuyết toán phát triển, mà công cụ giải toán cũng phát triển. Thông qua các ví dụ sau đây:

+ ả ếu như hình học ban đầu chỉ giải theo phương pháp tổng hợp thì sau đó đã có những công cụ mới giải toán mạnh hơn, phù hợp hơn như phương pháp vectơ, phương pháp giải tích...

+ Việc vẽ đồ thị, từ việc dùng công cụ đại số (thay điểm) để vẽ đồ thị cho đến công cụ giải tích (dùng bảng biến thiên).

+ Với các bài toán đố, chỉ với những phép toán thông thường thì việc giải một số bài toán rõ ràng bất tiện và không nhanh chóng hơn bằng phương pháp dùng phương trình để giải. Ví dụ: bài toán “gà và chó”...

+ Việc xét dấu từ nhị thức => tam thức

Tất cả điều đó cho thấy *cái mới ra đời thay thế cái cũ, cái tiến bộ ra đời thay thế cái lạc hậu. ả hưng sự thay thế đó không phải là phủ nhận hoàn toàn, mà là trên cơ sở kế thừa cái cũ. Chẳng hạn, một số phương trình bậc ba, bậc 4 dạng đặc biệt cũng được giải bằng cách đưa về phương trình bậc hai; còn trong một bài toán hình học đôi khi phải kết hợp cả các phương pháp vectơ, phương pháp giải tích,...* Tất cả sự phát triển đó là tất yếu trong toán học, và vì sự tất yếu đó, nên khi xem xét kiến thức toán học phải ủng hộ cái mới, tránh thái độ bảo thủ. Cụ thể như, khi xét dấu tam thức bậc hai, ta phải vận dụng xét dấu tam thức bậc hai vào giải bài toán tránh thực hiện theo kiểu tách thành tích 2 nhị thức bậc nhất. Đôi khi, chúng ta lại nghĩ việc xét dấu nhị thức dễ hơn và chúng ta đã quen làm nên không chịu đổi mới qua phương pháp xét dấu tam thức. Đó chính là tư tưởng bảo thủ, thành kiến cái mới, tiến bộ

Tất cả sự phát triển và vận động đó cũng gắn liền với sự phát triển và vận động của tư duy các nhà toán học. Sự phát triển không ngừng đó của toán học đã tạo ra sự phát triển về việc ứng dụng toán học vào các môn khoa học khác và vào thực tế cuộc sống. Toán học ngày càng phát triển thì khả năng ứng dụng của nó vào thực tiễn ngày càng cao

4) ả nguồn gốc vận động, phát triển của sự vật và hiện tượng

*Mâu thuẫn là một chỉnh thể, trong đó có hai mặt đối lập vừa thống nhất với nhau, vừa đấu tranh với nhau.* Trong toán học, những mặt đối lập đó là số âm và số dương (trong chỉnh thể số thực), số chẵn và số lẻ (trong chỉnh thể số tự nhiên), đồng biến, nghịch biến (trong chỉnh thể hàm số), mệnh đề và phủ định của mệnh đề đó (trong chỉnh thể mệnh đề), tập hợp và phần bù của tập hợp, = và  $\neq$ , số đúng và số gần đúng, trục Ox, Oy, ngoại tiếp và nội tiếp... ả hững mặt đối lập *liên hệ gắn bó chặt chẽ với nhau, làm tiền đề tồn tại cho nhau. Triết học gọi đó là sự thống nhất của các mặt đối lập.* Thật vậy, số thực dương và số thực âm không tồn tại riêng lẻ, nếu không có số thực dương thì số thực âm cũng không có đồng thời không tồn tại tập số thực và ngược lại.

## 5) Cách thức vận động và phát triển của sự vật và hiện tượng

*Sự biến đổi về chất dẫn đến sự biến đổi về lượng, chất mới sinh ra bao hàm một lượng mới tương ứng.*

+ Ta xét tổng sau đây  $S=a+b$

+ Quy tắc tam suất

+ Hàm số

+ Xét dấu biểu thức  $f(x)=6x+7$ : khi  $x$  thay đổi dần đến điểm giới hạn thì dấu của biểu thức cũng thay đổi

+ Xét một phương trình đa thức. ả ếu nó là phương trình bậc hai thì có tính chất về nghiệm là vô nghiệm, có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt; còn nếu nó là phương trình bậc ba thì có tính chất về nghiệm là có nghiệm, có hai nghiệm, có ba nghiệm phân biệt

Một số câu hỏi tìm hiểu thêm:

1) Hãy cho 3 ví dụ sự vận động trong toán học. Trong triết học có nói, khi xem xét sự vật hiện tượng phải đặt trong trạng thái vận động không ngừng của chúng. Vận dụng điều này vào giải toán như thế nào?

2) ả hận thức gồm 2 loại là nhận thức cảm tính và nhận thức lý tính, nhà triết học cổ Platon phê phán việc nhận thức cảm tính để chinh phục tri thức thế giới. Họ cho rằng bằng nhận thức cảm tính con người ta không bao giờ tìm được tri thức đích thực. Chỉ bằng nhận thức lý tính (cụ thể là tư duy con người) người ta mới có thể tìm ra được tri thức đích thực, suy nghĩ của bạn về vấn đề này?

3) Trong triết học Mác có nói “quá trình nhận thức khoa học là từ trực quan sinh động cho đến tư duy trừu tượng rồi từ tư duy trừu tượng trở về với thực tiễn”. Câu nói này được hiểu thế nào?

4) Sự biến đổi về lượng dẫn đến sự biến đổi về chất là một quá trình biến đổi từ từ. Vận dụng điều này vào việc dạy và học toán?

5) Trong triết học “sự biến đổi về lượng dẫn đến sự biến đổi về chất và đồng thời chất mới sẽ bao hàm một lượng mới tương ứng”. Hãy dựa vào chương “bất đẳng thức” mà đã được học, hãy làm sáng tỏ điều trên

6) ả hà toán học Pháp Decart – cha đẻ của hệ trục tọa độ đã từng nói một câu rất nổi tiếng “tôi tư duy là tôi tồn tại”. Câu nói của ông thể hiện quan điểm triết học duy vật hay duy tâm vì sao?

7) Làm rõ mối quan hệ về lượng và chất trong các đối tượng sau:

- a) Phương trình bậc hai  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) và  $\Delta=b^2-4ac$
- b) Trong toán học người ta cho rằng “đường tròn là một đa giác đều mà số cạnh là vô hạn
- c) Trong hệ tọa độ Oxy, cho 2 điểm  $M_1(x_1,1)$ ,  $M(x_2,2)$
- d) Chương bất đẳng thức

Một số lời gợi ý:

4) Muốn giỏi toán, muốn điểm cao môn toán ta phải siêng năng, cần mẫn không được vội vàng nôn nóng, phải đi từ những việc nhỏ nhất (để cho lượng biến đổi dần) làm bài thật cẩn thận, phải đọc kỹ đề, phải xét điều kiện, phải biện luận đầy đủ trường hợp, phải làm nháp nếu cần thiết, đọc kỹ đề bài rồi làm... Chúng ta nên nhớ “tích tiểu thành đại”, “góp gió sẽ thành bão”

5) Từ nhiều bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương, người ta đã khái quát nên bất đẳng thức Cosi cho 3 số, và từ đó nó trở thành một công cụ quan trọng để chứng minh rất nhiều bài toán bất đẳng thức

7d) Ban đầu chứng minh bất đẳng thức là chứng minh bằng phương pháp tương đương. Từ một số bài chứng minh bằng phương pháp tương đương (lượng biến đổi), người ta tổng quát hóa nên bất đẳng thức Cosi. Và khi đó người ta dùng bất đẳng thức Cosi để chứng minh (chất biến đổi). Với phương pháp này, một số lượng lớn bất đẳng thức đã được chứng minh (bao hàm lượng tương ứng)

**NGUYỄN CUNG HOÀNG NAM**